المحاضرة الثالثة عشر

خواص التكامل العقدي:

ليكن f ، g تابعين عقديين كمولين على طريق Γ ، α ثابتاً عقدياً، و f كمولاً على طريقين Γ_1 ، Γ_2 بحيث تكون نهاية Γ_1 بداية لـ Γ_2. عندئذ:

$$1)\ \int_{\Gamma} f+g=\int_{\Gamma} f+\int_{\Gamma} g$$

$$2)\ \int_{\Gamma} \alpha f=\alpha\int_{\Gamma} f$$

$$3)\ \int_{\Gamma^-} f+g=-\int_{\Gamma} f$$

حيث Γ^- هو المنحني Γ والممسوح بالاتجاه المعاكس " من النهاية إلى البداية".

مثال: احسب التكامل $\int_{C^-(0,1)}\frac{1}{z}dz$.

إذا كان $\Gamma=C^+(0,1)$ ، فإنّ $\Gamma^-=C^-(0,1)$، وبالتالي:

$$\int_{C^-(0,1)}\frac{1}{z}dz=-\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{z}dz=-2\pi i$$

حيث التكامل الأخير تم حسابه في المحاضرة السابقة.

$$4)\ \int_{\Gamma_1\oplus\Gamma_2} f=\int_{\Gamma_1} f+\int_{\Gamma_2} f$$

مثال: احسب التكامل $\int_{\Gamma_i} f(z)\,dz$ حيث $f(z)=(y-x)+i\,(3x^2)$،

$$\Gamma_1=[OA],\Gamma_2=[OB],\Gamma_3=OAB(\text{مثلث}),A=i,B=1+2i$$

الحل:

إنّ الجزأين الحقيقي والتخيلي للتابع f كثيرا حدود بمتحولين حقيقيين، فهما مستمران على $\mathbb{R}^2$ وبالتالي فإن f مستمر على $\mathbb{C}$، وإن القطع المستقيمة جميعها ملساء، وبالتالي فإنّ التابع كمول على هذه القطع.

ملاحظة: إذا كان لدينا قطعة مستقيمة $[AB]$، وكان لدينا Z_a العدد العقدي المقابل للنقطة A، وكان لدينا Z_b العدد العقدي المقابل للنقطة B، فإنّ التابع:

$$\gamma(t)=(1-t)z_a+tz_b : 0\le t\le 1$$

هو تمثيل وسيطي للقطعة المستقيمة التي بدايتها A ونهايتها B .

من أجل حساب التكامل على المنحني الأول:

$$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = it : 0 \le t \le 1\ ,\ \ x_{\gamma(t)} = 0, y_{\gamma(t)} = t, \acute{\gamma}_1(t) = i$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma_1(t))\acute{\gamma}_1(t)\,dt = \int_0^1 (t)\ i\,dt = i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{i}{2}$$

من أجل حساب التكامل على المنحني الثاني:

$$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (1-t)0 + t(1+2i) = t(1+2i)\ \ : 0 \le t \le 1$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 (((2t-t) + i(3t^2))\ (1+2i)\,dt$$

$$= (1+2i)\left[\frac{t^2}{2} + it^3\right]_0^1 = (1+2i)\left(\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{3}{2} + 2i$$

من أجل حساب التكامل على المنحني الثالث (المثلث) وهو مجموع لثلاث قطع مستقيمة (ملساء)، أي أن:

$$\Gamma_3 = [OA]\oplus[AB]\oplus[BO]$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz\ \ = \int_{[\mathrm{OA}]} f(z)\,dz + \int_{[\mathrm{AB}]} f(z)\,dz + \int_{[\mathrm{BO}]} f(z)\,dz$$

لنحسب التكامل في الحد الثاني:

$$[\mathrm{AB}] : \gamma(t) = (1-t)i + t(1+2i) = t + i(1+t)\ \ : 0 \le t \le 1$$

$$\int_{[\mathrm{AB}]} f(z)\,dz = \int_0^1 (((1+t-t) + i(3t^2))\ (1+i)\,dt$$

$$= (1+i)[t + it^3]_0^1 = (1+i)(1+i) = +2i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = \frac{i}{2} + 2i - \left(-\frac{3}{2} + 2i\right)$$

ملاحظة:

في هذا التمرين: إنّ قيمة التكامل على $[OB]$ مختلفة عن قيمته على $[OA]\oplus[AB]$ وبالتالي نستنتج أنّ التكامل غير مستقل عن الطريق المسلوك بالحالة العامة.

5) إذا كان f محدوداً على طريقٍ Γ، أي أنّه يوجد $M > 0$ بحيث $|f(z)| \le M$ لأجل كل z من Γ فإنّ: $\left|\int_\Gamma f\right| \le ML(\Gamma)$ ، أي أنّه إذا كان التابع محدودا على طريقٍ ما، فإنّ طويلة تكامله على ذلك الطريق لن تتجاوز (أصغر أو تساوي) العنصر الراجح لطويلة التابع على الطريق مضروباً بطول الطريق.

مثال: عيّن راجحاً لطويلة التكامل التالي:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\, dz$$

الحل:

إذا كان z من الدائرة $|z| = 2$ فإن $-2 \leq x = Re\, z \leq 2$ وإنّ:

$$|e^z| = e^{Re\,(z)} = e^x \leq e^2$$

حيث أنّ e^x هو تابع متزايد. من جهةٍ أخرى، نعلم أنّ:

$$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$$

$$\Longrightarrow |z^2+1| \geq \big||z^2| - |1|\big|$$

$$\Longrightarrow |z^2+1|_{|z|=2} \geq |2^2-1| = 3$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|z^2+1|_{|z|=2}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow |f(z)| = \left|\frac{e^z}{z^2+1}\right| \leq \frac{e^2}{3} = M \,:\, \forall z \,:\, |z| = 2$$

وعليه يكون وحسب الخاصة السابقة (5):

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz\right| \leq \frac{e^2}{3}(2\pi(2)) = \frac{4}{3}e^2\pi$$

حيث أن طول الطريق (الدائرة) يساوي $2\pi r = 2\pi(2)$.

تمرين: احسب التكامل $\int_\Gamma \frac{1}{z} dz$ حيث Γ هو مربع رؤوسه:

$$A = 1+i, B = -1+i\,, C = -1-i\,, D = 1-i$$

سيحل فيما بعد.

مبرهنة: إذا كان f مستمر على منطقة G، وكان لـ f تابعاً أصلياً F على G، فإنّ:

$$\int_\Gamma f = F(z_T) - F(z_I)$$

لأجل أي طريق Γ في G وحيث z_I بداية الطريق و z_T نهايته.

ملاحظة: إذا تحقّقت شروط المبرهنة السابقة فإنّ التكامل سيكون مستقلا عن الطريق المسلوك. بمعنى أن التكامل على أي طريق في المنطقة ويصل بين نقطتين في G، سيعتمد فقط بنقطتي البداية والنهاية.

مثال: احسب التكامل: $\int_{\Gamma} z\,dz$.

إنّ $f(z) = z$ تابع مستمر على أي طريق Γ من المستوي العقدي وإن $\frac{z^2}{2}$ تابع أصلي له على كامل $\mathbb{C}$. فإذا كان Γ طريقا بدايته z_1 ونهايته z_2، فحسب المبرهنة السابقة، يكون:

$$\int_{\Gamma} z\,dz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{2}(z_2^2 - z_1^2)$$

ملاحظة: إنّ استمرار تابع عقدي على منطقة غير كافٍ لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة.

نتيجة: إذا تحقّقت شروط المبرهنة السابقة على منطقةٍ G، فإنّ التكامل للتابع f على أي طريق مغلق في G سيكون معدوماً.

مثال معاكس يبيّن أن استمرار تابع عقدي غير كافٍ لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة:

لنأخذ التابع العقدي $f(z) = \frac{1}{z}$ وهو مستمر على المنطقة $\mathbb{C}^*$ إلا أنّه لا يملك تابعاً أصلياً عليها، لأنّه لو فرضنا جدلاً وجود تابع أصلي له على تلك المنطقة لوجب أن يكون التكامل $\int_{C^+(0,1)} \frac{1}{z}dz$ معدوماً، لأنّ الطريق $C^+(0,1)$ مغلق في $\mathbb{C}^*$، لكننا وجدنا سابقاً أنّ قيمة هذا التكامل $2\pi i$، وهذا تناقض. سببه الفرض الجدلي الخاطئ، وبالتالي فإنّه لا يملك تابعاً أصلياً على $\mathbb{C}^*$.

هل يكفي أن يكون التابع تحليلي على منطقة لوجود تابع أصلي على هذه المنطقة؟

في الحقيقة إنّ هذا غير كافٍ، والمثال المعاكس لذلك هو التابع $f(z) = \frac{1}{z}$ التحليلي على $\mathbb{C}^*$، وليس له تابع أصلي على $\mathbb{C}^*$، كما وجدنا قبل قليل.

في حال ورود هذا السؤال في الامتحان، فيتوجب إعادة جميع خطوات التمرين السابق بالتفصيل وذلك باستبدال الاستمرارية بالتحليلية.

مثال: احسب تكامل $f(z) = \frac{1}{z}$ على أي منحنٍ مغلق لا يحوي بداخله المبدأ.

الحل: إذا كان Γ منحنيا لا يحوي بداخله المبدأ فنستطيع جعله محتوى في منطقة تحقق الخاصة:" لا يمكن الانطلاق من أي نقطة من هذه المنطقة والعودة إليها بإجراء دورة كاملة حول المبدأ دون الخروج منها"، وبالتالي سيوجد فرع تحليلي للتابع اللوغاريتمي على تلك المنطقة، وسيكون هذا الفرع تابعاً أصلياً لـ $f(z) = \frac{1}{z}$ على تلك المنطقة، ولما كان Γ مغلق، فإنّ هذا التكامل على هذا الطريق يكون معدوماً (حسب النتيجة السابقة).

...انتهت المحاضرة الثالثة عشر...